Л 13. Определенный интеграл. Интегрирования определенного интеграла с помощью замены переменной и интегрированием по частям.

Цель лекции: познакомить студентов с определением определённого интеграла через предел интегральных сумм, изучить его основные свойства и формулу Ньютона–Лейбница. Научить применять замену переменной и метод интегрирования по частям в определённом интеграле.

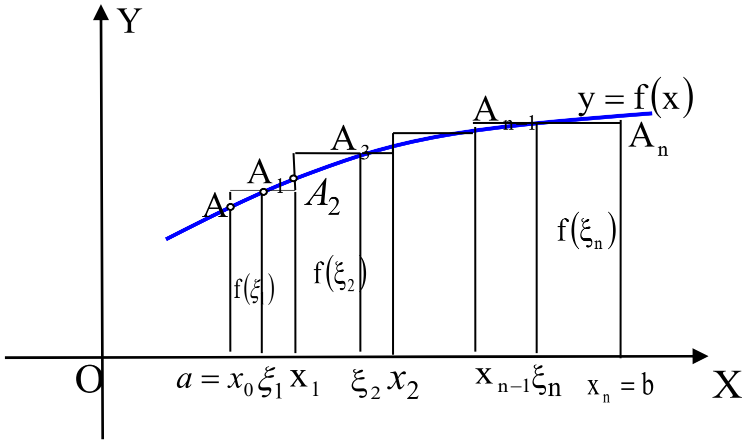
Основные вопросы

- Определение криволинейной трапеции и разбиения отрезка.
- Интегральные суммы и предел этих сумм.
- Определённый интеграл как предел интегральных сумм.
- Условия интегрируемости функции.
- Основные свойства определённого интеграла.
- Формула Ньютона–Лейбница.
- Определённый интеграл с переменным верхним пределом.
- Замена переменной в определённом интеграле.
- Интегрирование по частям в определённом интеграле.

Краткое содержание: в лекции вводится определение определённого интеграла как предела интегральных сумм. Рассматриваются свойства интеграла, включая линейность, монотонность, оценку сверху и снизу и теорему о среднем значении. Изучается формула Ньютона–Лейбница и интегралы с переменным верхним пределом. Также рассматриваются два важных метода вычисления определённых интегралов — замена переменной и интегрирование по частям.

Аппарат определенных интегралов возник, прежде всего, для решения задач о нахождении площадей плоских фигур, в настоящее время эти интегралы используются практически во всех технических науках для решения задач, в которых требуется находить суммы большого числа малых величин.

Определение. Криволинейной трапецией называется область на плоскости Oxy, ограниченная осью Ox, прямыми $x=a, x=b$, где $a<b$ и графиком непрерывной на $[a,b]$ функции $y=f(x)$.



Для простоты можно считать, что $f(x) \geq 0$, т.е. трапеция расположена выше оси Ox. Приближенно площадь криволинейной трапеции можно найти, заменив ее суммой площадей прямоугольников с малыми основаниями и высотами, равными значениям функции $f(x)$ в некоторых выбранных точках.

Определение. Разбиением отрезка $[a,b]$ на n частей называется набор чисел $x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n$ из этого отрезка, где $x_0 = a$ и $x_n = b$.

В каждом отрезке (элементарном участке) $[x_{i-1}, x_i]$ разбиения выберем некоторую точку $\xi_1 \in [x_{i-1}, x_i]$, где $i = 1,2,3,...,n.$

Такое разбиение будем обозначать буквой Т, а длину элементарного участка через $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Пусть на отрезке $[a,b]$ определена некоторая функция $y = f(x)$.

Определение. Интегральной суммой для функции $y = f(x)$, построенной по разбиению Т отрезка $[a,b]$, называется сумма произведений значений функции в выбранных точках ξ_i на длины элементарных участков.

Такую сумму будем обозначать через $\sum_f(T) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.

Если $f(x) \geq 0$, то интегральная сумма $\sum_f(T)$ равна площади ступенчатой фигуры, составленной из прямоугольников с основаниями Δx_i и высотами $f(\xi_i)$ (см. рис 1), т.е. $\sum_f(T)$ приближенно равна площади соответствующей криволинейной трапеции.

Определение. Определенным интегралом от функции $y = f(x)$ на отрезке $[a,b]$ называется предел интегральных сумм этой функции по разбиениям $[a,b]$, у которых максимальный Δx_i стремится к нулю, т.е.

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum\nolimits_f (T).$$

Если $f(x) \geq 0$ на $[a,b]$, то этот интеграл выражает точную площадь соответствующей криволинейной трапеции.

Теорема 1. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ или имеет на этом отрезке конечное число точек разрыва первого рода, то эта функция интегрируема на $[a,b]$, т.е. $\int_a^b f(x)dx$ существует.

Смысл этой теоремы состоит в том, что при выполнении условий теоремы, при любых разбиениях, у которых длины всех участков Δx_i стремятся к нулю, интегральные суммы $\sum_f (T)$ стремятся к одному и тому же числу $\int_a^b f(x)dx$.

Свойства определенного интеграла

В дальнейшем будем считать, что все рассматриваемые функции интегрируемы.

1) $\int_a^b Cdx = C(b-a)$, C - постоянная.

2) Если $f(x) \le g(x)$ на $[a,b]$, то $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$.

3) Если на отрезке $[a,b]$ функция $f(x)$ ограничена снизу и сверху числами m и M, т.е. если на $[a,b]$ $m \le f(x) \le M$, то $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$.

Доказательство этого утверждения непосредственно следует из свойств 2 и 1. Это свойство называется – оценка определенного интеграла снизу и сверху.

Пример. Оценим интеграл $\int_0^{10} (5+\sin x^2)dx$. Поскольку $-1 \le \sin x^2 \le 1$, то $4 \le 5+\sin x^2 \le 6$. Следовательно, $40 \le \int_0^{10} (5+\sin x^2)dx \le 60$.

4) Теорема о среднем. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, тогда на этом отрезке найдется такая точка c, что $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$. Это значение $f(c)$ называется средним значением функции на $[a,b]$.

5) $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$. Это свойство называется оценкой модуля определенного интеграла.

6) Если выполняется неравенство $a < c < b$, то $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Определение. Если $a < b$, то интегралом $\int_b^a f(x)dx$ называется число $-\int_a^b f(x)dx$.

Интеграл $\int_a^a f(x)dx$ считается равным нулю. Можно доказать, что с учетом последнего определения, свойство 6 справедливо (при условии существования интегралов) для чисел a,b,c расположенных в любом порядке, т.е. требование $a<c<b$ здесь не обязательно.

1. Формула Ньютона – Лейбница. Кроме отмеченных выше, определенные интегралы обладают еще несколькими важными свойствами, которые мы сформулируем в виде следующих теорем.

Пусть $f(x)$ интегрируема в отрезке $[a,b]$ и $a \le x \le b$. Определим новую функцию $y=\Phi(x)$ для $x \in [a,b]$ с помощью соотношения $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$.

Здесь $\Phi(x)$ выражается с помощью интеграла с переменным верхним пределом x от функции $y=f(t)$. Заметим, что переменную функции в определенном интеграле можно обозначить любой буквой. Из определения определенного интеграла следует, что его величина от этого не изменится.

Теорема 2. Если функция $y=f(x)$ непрерывна в $[a,b]$, то функция $y=\Phi(x)$ является первообразной для функции $y=f(x)$ в (a,b), т.е. в этом интервале $\Phi'(x)=f(x)$.

Следующая теорема является основной в интегральном исчислении, поскольку она дает способ нахождения определенных интегралов с помощью неопределенных.

Теорема 3. (Ньютона - Лейбница). Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна в отрезке $[a,b]$ и функция $y=F(x)$ есть ее первообразная на этом отрезке, тогда $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$. Часто разность $F(b)-F(a)$ здесь записывают в сокращенном виде: $F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$.

Пример. $\int_0^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{2^3}{3}-\frac{0}{3}=\frac{8}{3}$.

2. Замена переменной в определенном интеграле

Теорема 4. Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, а функция $x=\varphi(t)$ монотонна и непрерывно дифференцируема на отрезке $[\alpha,\beta]$, где $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Пример. Вычислим интеграл $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$ с помощью замены переменной $x=\sin t$:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{dx} = \left|\mathrm{x}=\sin\mathrm{t}, \mathrm{dx}=\cos\mathrm{t}\mathrm{dt}; (\mathrm{x}=0) \Rightarrow (\sin\mathrm{t}=0) \Rightarrow (\mathrm{t}=0); (\mathrm{x}=1) \Rightarrow\right.$$

$$\Rightarrow (\sin t = 1) \Rightarrow \left(t = \frac{\pi}{2} \right)\Bigg| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt =$$

$$= \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sin \pi}{2} \right) - \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{\pi}{4}.$$

Этот интеграл выражает площадь четверти круга радиуса 1 с центром в начале координат, лежащей в первом квадранте.

3. Нахождение определенного интеграла по частям

Теорема 5. Пусть функции $y = u(x)$ и $y = v(x)$ непрерывны дифференцируемы на отрезке $[a,b]$, тогда верно равенство $\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx$.

Это равенство в сокращенном виде можно записать и так $\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$.

Пример.
$$\int_1^e x \ln x dx = \int_1^e \ln x d\frac{x^2}{2} = \left| u = \ln x, du = \frac{1}{x}dx, v = \frac{x^2}{2} \right| = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}dx =$$
$$= \frac{e^2}{2}\ln e - 0 - \int_1^e \frac{x}{2}dx = \frac{e^2}{2} - \frac{x^2}{4}\Big|_1^e = \frac{e^2}{2} - \left(\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4} \right) = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$$

Вопросы для самоконтроля

1. Что называют криволинейной трапецией?
2. Что такое разбиение отрезка и интегральная сумма?
3. Дайте определение определённого интеграла.
4. В каких случаях функция интегрируема на отрезке?
5. Перечислите основные свойства определённого интеграла.
6. Сформулируйте формулу Ньютона–Лейбница.
7. Что называют интегралом с переменным верхним пределом?
8. Как выполняется замена переменной в определённом интеграле?
9. Запишите формулу интегрирования по частям для определённого интеграла.
10. Когда применение интегрирования по частям является удобным?

Литература

1. Махмеджанов Н., Махмеджанова Р.Н. Сборник задач по высшей математике. – 2009. – 408 стр
2. Н.М. Махмеджанов. Сборник заданий по высшей математике. Алматы: «Қазақ Университеті», 2021
3. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа, 2005. Т.1. Т.2.
4. Демидович Сборник задач по математическому анализу